ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 27, № 139 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-284-299

УДК 519.6

О существовании непрерывных селекций многозначного отображения, связанного с задачей минимизации функционала

Рафик Агасиевич ХАЧАТРЯН

Ереванский государственный университет

0025, Армения, г. Ереван, ул. Алека Манукяна, 1

Аннотация. Рассматривается параметрическая задача вида

$$f(x,y) \to \inf, \quad x \in M,$$

где M — выпуклое замкнутое подмножество гильбертова или равномерно выпуклого пространства X, а y — параметр, принадлежащий топологическому пространству Y. Для этой задачи определено множество ϵ-оптимальных точек:

$$a_\epsilon(y) = \{x \in M \mid f(x,y) \le \inf_{x \in M} f(x,y) + \epsilon\},$$

где $\epsilon > 0$. Обсуждаются условия полунепрерывности и непрерывности многозначного отображения a_ϵ. С использованием методов проекции градиентов и линеаризации получены теоремы о существовании непрерывных селекций многозначного отображения a_ϵ. Одними из основных предположений этих теорем являются выпуклость функционала $f(x,y)$ по переменной x на множестве M и непрерывность производной $f'_x(x,y)$ на множестве $M \times Y$. Приводятся примеры, подтверждающие существенность принятых предположений, а также примеры, иллюстрирующие применение полученных утверждений к оптимизационным задачам.

Ключевые слова: строго выпуклые функции, оператор проектирования, неподвижные точки отображения, многозначное отображение, непрерывные селекции, множество ϵ-оптимальных точек

Для цитирования: *Хачатрян Р.А.* О существовании непрерывных селекций многозначного отображения, связанного с задачей минимизации функционала // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 139. С. 284–299. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-284-299.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-284-299

On the existence of continuous selections of a multivalued mapping related to the problem of minimizing a functional

Rafik A. KHACHATRYAN
Yerevan State University
1 Alex Manukyan St., Yerevan 0025, Armenia

Abstract. The article considers a parametric problem of the form

$$f(x,y) \to \inf, \quad x \in M,$$

where M is a convex closed subset of a Hilbert or uniformly convex space X, y is a parameter belonging to a topological space Y. For this problem, the set of ϵ -optimal points is given by

$$a_\epsilon(y) = \{x \in M \mid f(x,y) \leq \inf_{x \in M} f(x,y) + \epsilon\},$$

where $\epsilon > 0$. Conditions for the semicontinuity and continuity of the multivalued mapping a_ϵ are discussed. Using gradient projection and linearization methods, we obtain theorems on the existence of continuous selections of the multivalued mapping a_ϵ. One of the main assumptions of these theorems is the convexity of the functional $f(x,y)$ with respect to the variable x on the set M and continuity of the derivative $f'_x(x,y)$ on the set $M \times Y$. Examples that confirm the significance of the assumptions made are given, as well as examples illustrating the application of the obtained statements to optimization problems.

Keywords: strictly convex functions, projection operator, fixed points of a mapping, multivalued mapping, continuous selections, set of ϵ -optimal points

Mathematics Subject Classification: 54C60, 52A40.

For citation: Khachatryan R.A. O sushchestvovanii nepreryvnykh selektsiy mnogoznachnogo otobrazheniya, svyazannogo s zadachey minimizatsii funktsionala [On the existence of continuous selections of a multivalued mapping related to the problem of minimizing a functional]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 139, pp. 284–299. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-284-299. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Исследование зависимости экстремальных значений функционала и множеств соответствующих аргументов от параметра — одна из основных задач математической теории чувствительности (см., например, [1]). В прикладных оптимизационных задачах целевой функционал, как правило, бывает известен с некоторой погрешностью. Погрешность также возникает при численном решении задач оптимизации. Таким образом, естественно возникает вопрос о нахождении «почти оптимального» элемента, т. е. элемента, в котором значение минимизируемого функционала мало отличается от экстремального. Соответственно, при рассмотрении вопросов чувствительности следует исследовать зависимость от параметра множеств «почти оптимальных» аргументов. Именно этой проблеме посвящена настоящая работа.

1. Вспомогательные сведения

Напомним вначале некоторые известные понятия многозначного анализа (подробнее см., например, [2]), используемые в работе.

Пусть X, Y — топологические пространства, $a : X \to 2^Y$ многозначное отображение с замкнутыми значениями. Это отображение называют полунепрерывным сверху в $x_0 \in X$, если для любой окрестности $N(a(x_0))$ множества $a(x_0)$ существует окрестность $N(x_0)$ точки x_0 такая, что

$$a(x) \subset N(a(x_0)) \quad \forall x \in N(x_0).$$

Отображение a называют полунепрерывным снизу в x_0, если для любого $y_0 \in a(x_0)$ и любой окрестности $N(y_0)$ точки y_0 существует окрестность $N(x_0)$ точки x_0 такая, что

$$a(x) \cap N(y_0) \neq \emptyset \quad \forall x \in N(x_0).$$

Если отображение полунепрерывно сверху и снизу в x_0, то его называют непрерывным в этой точке. Отображение, полунепрерывное сверху (полунепрерывное снизу, непрерывное), во всех точках $x_0 \in X$ называют полунепрерывным сверху (полунепрерывным снизу, непрерывным).

Селекцией многозначного отображения $a : X \to 2^Y$ называется такая однозначная функция $y(x)$, что $y(x) \in a(x)$ при всех $x \in X$. Условия существования непрерывной селекции дает следующая классическая теорема Э. Майкла [3].

Теорема 1.1. *Пусть X — паракомпактное пространство, Y — банахово пространство, $a : X \to 2^Y$ — полунепрерывное снизу многозначное отображение с выпуклыми замкнутыми значениями. Тогда для любых $x_0 \in X$, $y_0 \in a(x_0)$ существует непрерывная селекция $y(x)$ отображения a такая, что $y(x_0) = y_0$.*

В дальнейшем нам потребуется еще следующий известный результат о непрерывной зависимости от параметра неподвижной точки сжимающего однозначного отображения (см. [4, Теорема II. 3.7, с. 203]).

Теорема 1.2. *Пусть X — полное метрическое пространство, Y — топологическое пространство, и отображение $v : X \times Y \to X$ непрерывно. Если при некотором $k \in [0, 1)$ выполнено*

$$\rho(v(x_1, y), v(x_2, y)) \leq k\rho(x_1, x_2) \quad \forall y \in Y \quad \forall x_1, x_2 \in X,$$

то существует такая непрерывная функция $u : Y \to X$, *что*

$$u(y) = v(u(y), y) \quad \forall y \in Y.$$

2. Условия непрерывности многозначного отображения a_ϵ

Пусть X и Y — топологические пространства, M — некоторое подмножество из X. Пусть $f(x, y)$ — вещественный функционал на произведении $X \times Y$. При фиксированном $y \in Y$ рассмотрим задачу минимизации функционала f на множестве M:

$$f(x, y) \to \inf, \quad x \in M \subseteq X. \tag{2.1}$$

Положим

$$a_0(y) = \{x \in X \mid f(x, y) = V(y) \equiv \inf_{x \in M} f(x, y)\}.$$

В литературе обычно рассматриваются вопрос непрерывности функции V или многозначного отображения a_0, зависящих от параметра y. В [5] подробно исследована непрерывность функционала $V(y)$, $y \in Y$, когда X и Y — локально выпуклые топологические пространства, а функционал $f(x, y)$ является выпуклым на произведении $X \times Y$.

Приведем пример, показывающий, что условие выпуклости функционала f существенно для непрерывности V.

П р и м е р 2.1. Пусть $M = [0, 1]$, $Y = [0, 1]$, а функционал f задан формулой

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le y \le \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{если } \frac{1}{2} < y \le 1. \end{cases}$$

Очевидно, что f не является выпуклым по совокупности переменных. Для рассматриваемой задачи функционал V определяется формулой

$$V(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le y \le \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{если } \frac{1}{2} < y \le 1, \end{cases}$$

и терпит разрыв в точке $y = \frac{1}{2}$.

Следующая теорема описывает поведение множества точек минимумов $a_0(y)$ (см. [6, Предложение 23, с. 125]).

Теорема 2.1. *Пусть X — хаусдорфово компактное топологическое пространство, Y — хаусдорфово топологическое пространство, и функционал f является непрерывным на $X \times Y$. Тогда функционал V непрерывен, а многозначное отображение a_0 полунепрерывно сверху.*

В условиях теоремы 2.1, если множество $a_0(x)$ одноточечно, то однозначное отображение a_0 непрерывно.

При рассмотрении задач вида (2.1), возникающих на практике, необходимо учитывать, что минимизирующий функционал f бывает известен (вообще говоря) с погрешностью. Таким образом, на практике приходится иметь дело с «возмущенной задачей» вида (2.1), состоящей в отыскании «почти оптимального» элемента, т. е. элемента, в котором значение минимизируемого функционала мало отличается от его точной нижней грани. Поэтому для элемента y и числа $\epsilon > 0$ естественно определить множество

$$a_\epsilon(y) = \{x \in M \mid f(x,y) \le \inf_{x\in M} f(x,y) + \epsilon\}. \tag{2.2}$$

Если $M \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт, а функционал $f(x,y)$ непрерывен по совокупности переменных и является выпуклым по x, то, согласно [7, пример 5.10, с. 156], многозначное отображение a_ϵ непрерывно. При таких предположениях в [8] методом проекции градиентов построены непрерывные селекции отображения a_ϵ.

В работе [9] даны условия липшицевости многозначного отображения вида (2.2), когда $f(x,y)$ — выпуклый полунепрерывный снизу функционал на $X \times Y$, где X и Y — нормированные пространства.

Как показано в следующем примере, выпуклость по x функционала $f(x,y)$ является существенным условием для непрерывности многозначного отображения a_ϵ,

П р и м е р 2.2. Пусть

$$f(x,y) = 1 + cos(x+y), \quad x \in [0,2\pi], \quad y \in \mathbb{R}.$$

Этот функционал не является выпуклым по x. Нетрудно проверить, что отображение

$$a_\epsilon(y) = \{x \in [0,2\pi] \mid cos(x+y) \le \epsilon - 1\} \quad (\epsilon \in (0,1))$$

не является полунепрерывным снизу в точке $y = \arccos(\epsilon - 1)$.

3. Непрерывные селекции отображения a_ϵ (случай гильбертова пространства X)

В некоторых из предлагаемых ниже утверждений мы отказываемся от условия непрерывности функционала f по совокупности переменных (x,y) и компактности пространства X. Вместо этого будем предполагать, что M — выпуклое замкнутое подмножество некоторого гильбертова или строго нормированного пространства, и потребуем выпуклость функционала f по переменной x. При таких предположениях мы построим непрерывные селекции многозначного отображения a_ϵ, проходящие через точку (x_0,y_0), где $x_0 \in a_0(y_0)$.

Приведем пример непрерывного многозначного отображения a_ϵ такого, что через любую точку его графика проходят непрерывные селекции, несмотря на то, что пространство Y не является паракомпактным.

П р и м е р 3.1. Для каждого $a \in \mathbb{R}$ зафиксируем сходящуюся к a последовательность $\{r_n(a)\}$, $n \in \mathbb{N}$ рациональных чисел, причем если a рационально, то положим $r_n(a) = a$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Множества $O_k(a) = \{r_n(a),\ n \ge k\}$, где $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ составляют базу некоторой топологии Υ на $\mathbb{R}$. В [10, пример 5, с. 18] доказано, что пространство $(\mathbb{R},\Upsilon)$ не является паракомпактом.

Теперь рассмотрим задачу (2.1), где $X = [0,1]$, $Y = (\mathbb{R},\Upsilon)$, а $f(x,y) = xy$. Для этой задачи отображение a_ϵ определяется формулой

$$a_\epsilon(y) = \begin{cases} [0,1], & \text{если } y = 0, \\ [0,\frac{\epsilon}{y}] \cap [0,1], & \text{если } y > 0, \\ [0,1] \cap [1+\frac{\epsilon}{y}, +\infty), & \text{если y<0.} \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что отображение a_ϵ непрерывно в смысле топологии Υ, и через любую точку (x_0, y_0), $x_0 \in a_\epsilon(y_0)$ проходят непрерывные селекции.

Если пространство X гильбертово, а Y — **произвольное** топологическое пространство для построения непрерывных селекций многозначного отображения a_ϵ, проходящих через любую точку его графика, ниже в этом параграфе (см. теорему 3.3) мы будем пользоваться методом проекции градиентов. В методе проекции градиентов функциональная последовательность $x_k(y)$ генерируется по правилу

$$x_{k+1}(y) = \Pi_M(x_k(y) - \alpha_k f'_x(x_k(y), y)), \quad x_0(y) \equiv x_0 \in M \quad \forall y \in Y, \tag{3.1}$$

где параметр шага α_k выбирается определенным образом. Когда пространство X равномерно выпукло, для построения непрерывных селекций отображения a_ϵ применяется метод линеаризации (см. [11]).

Итак, в этом параграфе мы рассмотрим вопрос существования непрерывных селекций многозначного отображения a_ϵ в случае, когда M — выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства X, а Y — топологическое пространство (возможно непаракомпактное). Мы покажем, что метод градиентного спуска вида (3.1) является удобным аппаратом построения таких селекций.

Обозначим через (a, b) скалярное произведение векторов a и b в гильбертовом пространстве X. Предположим, что при фиксированном параметре $y \in Y$ функция $f(\cdot, y)$ определена на открытом множестве $\Omega \subseteq X$, содержащем заданное выпуклое замкнутое множество M.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) M *— выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства* X, *а* Y *— топологическое пространство;*

2) $f : \Omega \times Y \to \mathbb{R}$ *— функция, производная* $f'_x(x, y)$ *по Фреше которой непрерывна по совокупности переменных* (x, y);

3) $f'_x(x, y)$ *удовлетворяет условию Липшица по переменной* x, *т. е. существует число* $L > 0$ *такое, что*

$$\|f_x(x_1, y) - f'_x(x_2, y)\| \le L\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in M \quad \forall y \in Y;$$

4) *функция* $f(x, y)$ *сильно равномерно выпукла по* x *на множестве* M, *т. е. существует число* $\alpha > 0$, *такое, что*

$$f(x_1, y) \ge f(x_2, y) + (f'_x(x_2, y), x_1 - x_2) + \frac{\alpha}{2}\|x_1 - x_2\|^2 \quad \forall x_1, x_2 \in M \quad \forall y \in Y.$$

Тогда задача (2.1) *для произвольного* $y \in Y$ *имеет единственное решение* $x^*(y)$ *и отображение* $x^* : Y \to M$ *непрерывно.*

Доказательство. Определим отображение $v : M \times Y \to M$ соотношением

$$v(x, y) = \Pi_M(x - \frac{\alpha}{L^2} f'_x(x, y)).$$

Покажем, что оно удовлетворяет всем условиям теоремы 1.1. Так как оператор проектирования Π_M является сжимающим с константой, равной единице, имеем

$$\|v(x_1,y)-x(x_2,y)\|^2 = \|\Pi_M(x_1-\frac{\alpha}{L^2}f'_x(x_1,y))-\Pi_M(x_2-\frac{\alpha}{L^2}f'_x(x_2,y))\|^2$$
$$\leq \|(x_1-x_2)-\frac{\alpha}{L^2}(f'_x(x_1,y)-f'_x(x_2,y))\|^2 =$$
$$\|x_1-x_2\|^2+(\frac{\alpha}{L^2})^2\|f'_x(x_1,y)-f'_x(x_2,y)\|^2-2\frac{\alpha}{L^2}(f'_x(x_1,y)-f'_x(x_2,y),x_1-x_2)$$
$$\leq (1+(\frac{\alpha}{L^2})^2L^2-2\frac{\alpha^2}{L^2})\|x_1-x_2\|^2=(1-\frac{\alpha^2}{L^2})\|x_1-x_2\|^2.$$

Отсюда непосредственно следует, что отображение $V: M\times Y\to M$ сжимающее и непрерывное. Поэтому, согласно теореме 1.1, существует непрерывное отображение $x^*(y)$, такое, что $x^*(y)=v(x^*(y),y)\quad \forall y\in Y$. Согласно [12, Лемма 2.2, с. 225] точка $x^*(y)$ является решением задачи 2.1. □

Приведем пример, иллюстрирующий теорему 1.2.

П р и м е р 3.2. Пусть $X=[0,1]$, $Y=[-1,0]$, функция f задана формулой

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2, & \text{если } y=0,\\ x^2+xy+1, & \text{если } y\in[-1,0]. \end{cases}$$

Очевидно, что эта функция удовлетворяет условиям (2)–(4) теоремы 3.1. Задача (2.1) в этом случае для произвольного $y\in Y$ имеет единственное непрерывное решение $x^*(y)=-\frac{y}{2}$, $y\in Y$. Заметим, что функция f разрывна в точках $(x,0)$, $x\in[0,1]$.

Следствие 3.1. *Пусть множество $M\subset X$ выпукло, замкнуто и ограничено, а $f(x,y)$ — выпуклая по x функция, причем ее производная $f'_x(x,y)$ непрерывна по совокупности переменных $(x,y)\in\Omega\times Y$. Пусть $x_0\in a_0(y_0)$. Тогда существует непрерывное отображение $x:Y\to M$, такое, что*

$$x(y)\in a_\epsilon(y)\quad \forall y\in Y,\quad x(y_0)=x_0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$g(x,y)=f(x,y)+\delta\|x-x_0\|^2,$$

где δ — некоторое положительное число. Рассмотрим следующую задачу минимизации по x при фиксированном параметре y :

$$g(x,y)\to\min,\quad x\in M.$$

Ясно, что функция g удовлетворяет всем предположениям теоремы 3.1. Поэтому существует непрерывное отображение $x_\delta(y)$ такое, что

$$g(x,y)\geq g(x_\delta(y),y)\quad \forall x\in M\quad \forall y\in Y. \tag{3.2}$$

Пусть $z\in M$. Для произвольного $\lambda\in(0,1)$ положим

$$x_\lambda=(1-\lambda)x_\delta(y)+\lambda z.$$

Подставляя x_λ вместо x в неравенство (3.2), получим

$$f(x_\delta(y),y)+\delta\|x_\delta(y)-x_0\|^2 \le f(x_\lambda,y)+\delta\|x_\delta(y)-x_0\|^2$$
$$= f\big((1-\lambda)x_\delta(y)+\lambda z,y\big)+\delta\|x_\delta(y)-x_0+\lambda(z-x_\delta(y)\|^2 \le (1-\lambda)f(x_\delta(y),y)+\lambda f(z,y)$$
$$+\delta\big(\|x_\delta(y)-x_0\|^2+2\lambda\big(x_\delta(y)-x_0,z-x_\delta(y)\big)+\lambda^2\|z-x_\delta(y)\|^2\big).$$

Отсюда следует

$$f(z,y)-f(x_\delta(y),y)\ge 2\delta\big(x_0-x_\delta(y),z-x_\delta(y)\big)-\lambda\|z-x_\delta(y)\|^2.$$

Переходя здесь к пределу при $\lambda\to 0$, получаем неравенство

$$f(z,y)-f(x_\delta(y),y)\ge 2\delta\big(x_0-x_\delta(y),z-x_\delta(y)\big)\quad \forall z\in M\quad \forall y\in Y.$$

Отсюда

$$f(x_\delta(y),y)\le \min_{z\in M} f(z,y)+2\delta D^2,$$

где D — диаметр множества M. Теперь, если $\delta<\frac{\epsilon}{2D^2}$, то

$$f(x_\delta(y),y)\le \min_{z\in M} f(z,y)+\epsilon.$$

Покажем, что $x_\delta(y_0)=x_0$. Так как $x_\delta(y)$ — решение вышеуказанной задачи, имеем

$$f(x,y)+\delta\|x-x_0\|^2\ge f(x_\delta(y),y)+\delta\|x_\delta(y)-x_0\|^2\quad \forall x\in M\quad \forall y\in Y.$$

Полагая здесь $x=x_0$, $y=y_0$, получим

$$f(x_0,y_0)\ge f(x_\delta(y_0),y_0)+\delta\|x_\delta(y_0)-x_0\|^2.$$

Отсюда, если $x_\delta(y_0)\ne x_0$, то $f(x_0,y_0)>f(x_\delta(y_0),y_0)$, но это противоречит тому, что x_0 — точка минимума функции f при параметре y_0. □

Теорема 3.2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *функция $f(x,y)$ выпукла по x на выпуклом замкнутом и ограниченном подмножестве M гильбертова пространства X;*

2) *производная $f'_x(x,y)$ непрерывна по совокупности переменных (x,y) и ограничена на множестве $M\times Y$, т. е. существует число $G>0$, такое, что*

$$\|f'_x(x,y)\|\le G\quad \forall (x,y)\in M\times Y.$$

Тогда для $x_0\in a_0(y_0)$, $\epsilon>0$ существует непрерывное отображение $x(y)$ такое, что

$$f(x(y),y)<V(y)+\epsilon\quad \forall y\in Y,\quad x(y_0)=x_0.$$

Доказательство. Пусть $x^*(y)$ — решение задачи (2.1). Для построения непрерывного отображения $x(y)$ применим метод проекции градиентов (3.1), причем параметр шага α_k выберем следующим образом

$$\alpha_k>0,\quad \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k=+\infty,\quad \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^2<+\infty.$$

Имеем

$$\|x_{k+1}(y) - x^*(y)\|^2 \le \|x_k(y) - \alpha_k f'_x(x_k(y), y) - x^*(y)\|^2$$
$$= \|x_k(y) - x^*(y)\|^2 - 2\alpha_k\big(f'_x(x_k(y), y), x_k(y) - x^*(y)\big) + \alpha_k^2\|f'_x(x_k(y), y)\|^2.$$

Просуммируем это неравенство по всем k от 0 до n, где n фиксировано. Получим

$$\|x_{n+1}(y) - x^*(y)\|^2$$
$$\le \|x_0 - x^*(y)\|^2 - 2\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\big(f'_x(x_k(y), y), x_k(y) - x^*(y)\big) + \sum_{k=0}^{n}\alpha_k^2\|f'_k(x_k(y), y)\|^2.$$

Так как функция $f(x, y)$ выпукла по x, справедливо неравенство

$$f(x, y) - f(x_k(y), y) \ge \big(f'_x(x_k(y), y), x - x_k(y)\big) \quad \forall x \in M.$$

Поэтому имеем

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\big(f(x_k(y), y) - f(x^*(y), y)\big) \le \sum_{k=0}^{n}\alpha_k\big(f'_x(x_k(y), y), x_k(y) - x^*(y)\big)$$
$$\le \frac{1}{2}\|x_0 - x^*(y)\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^2\|f'_x(x_k(y), y)\|^2,$$

и из этого неравенства следует, что

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\big(f(x_k(y), y) - f(x^*(y), y)\big)$$
$$\le \frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\Big(\frac{1}{2}\|x_0 - x^*(y)\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^2\|f'_x(x_k(y), y)\|^2\Big). \quad (3.3)$$

Положим

$$\overline{x}_n(y) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x_k(y).$$

Так как функция f выпукла по x, то из (3.3) получим

$$f(\overline{x}_n(y), y) - f(x^*(y), y) \le \frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\Big(\frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{2}G\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^2\Big), \quad (3.4)$$

где D — диаметр множества M. Правая часть неравенства (3.4) для достаточно больших n становится меньше ϵ, поэтому из этого неравенства следует, что

$$f(\overline{x}_n(y), y) < \min_{x\in M} f(x, y) + \epsilon.$$

Поскольку $x_0 \in a_0(y_0)$, справедливы равенства

$$x_1(y_0) = \Pi_M(x_0 - \alpha_1 f'_x(x_0, y_0)) = x_0.$$

По индукции легко можно установить, что $x_k(y_0) = x_0$ для любого k. Следовательно, $\overline{x}_n(y_0) = x_0$. $\square$

Теорема 3.3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) M *— выпуклое компактное подмножество гильбертова пространства* X, *а* Y *— топологическое пространство;*

2) *функция* $f(x,y)$ *— выпукла по* x *на множестве* M *и непрерывна по совокупности переменных* (x,y) *на множестве* $M\times Y$;

3) *производная* $f'_x(x,y)$ *непрерывна по совокупности переменных* (x,y) *на* $M\times Y$.

Тогда через любую точку (x_0,y_0), $x_0\in a_\epsilon(y_0)$, *проходит непрерывная селекция отображения* a_ϵ, *т. е. существует непрерывная функция* $x:Y\to M$ *такая, что*

$$x(y)\in a_\epsilon(y)\quad \forall y\in Y,\quad x(y_0)=x_0.$$

Доказательство. В силу теоремы 2.1 функция V непрерывна. Поэтому многозначное отображение a_ϵ непрерывно. Если пространство Y паракомпактно, то утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы Майкла. Рассмотрим общий случай, когда Y — произвольное топологическое пространство.

Из теоремы 3.2 следует, что существует непрерывная функция $D(y)$ такая, что

$$f(D(y),y)<V(y)+\epsilon,\quad D(y)\in M\quad \forall y\in Y. \tag{3.5}$$

Положим

$$T(y)=\bigl\{t\in[0,1]\,|\,tx_0+(1-t)D(y)\in a_\epsilon(y)\bigr\}.$$

Обозначим через $t(y)$ максимальное число множества $T(y)$. Очевидно, что $t(y_0)=1$, и поэтому

$$t(y_0)x_0+(1-t(y_0))D(y_0)=x_0.$$

Докажем, что функция $t(y)$ непрерывна, и это будет означать, что искомой селекцией многозначного отображения a_ϵ является отображение $t(y)x_0+(1-t(y))D(y)$. Допустим противное. Пусть $y_k\to\overline{y}$ и $\overline{t}$ — предельная точка последовательности $\{t(y_k)\}$ (т. е. $t(y_{k_n})\to\overline{t}$) такая, что $\overline{t}<t(\overline{y})$. Так как

$$f(t(\overline{y})x_0+(1-t(\overline{y})D(\overline{y}),\overline{y})-V(\overline{y})-\epsilon\le 0,$$

то отсюда и из (3.5), используя также выпуклость функции $f(x,y)$ по x, получим

$$f(\overline{t}x_0+(1-\overline{t})D(\overline{y}),\overline{y})-V(\overline{y})<\epsilon.$$

Из этого неравенства вследствие непрерывности функции f для достаточно больших n имеем

$$f(t(y_{k_n})x_0+(1-t(y_{k_n}))D(y_{k_n}),y_{k_n})-V(y_{k_n})<\epsilon.$$

Зафиксируем n. Используя непрерывность функции $f(x,y)$ по x, можем найти число $\delta>0$ настолько малым, что

$$f\bigl(t(y_{k_n})+\delta\bigr)x_0+\bigl(1-(t(y_{k_n})+\delta)D(y_{k_n}),y_{k_n}\bigr)-V(y_{k_n})<\epsilon,$$

а это неравенство противоречит определению $t(y_{k_n})$. Таким образом, доказано, что все предельные точки последовательности $\{t(y_k)\}$ совпадают с точкой $t(\overline{y})$. Следовательно, функция $t(y)$ непрерывна. $\square$

З а м е ч а н и е 3.1. Рассмотрим отображение

$$b(y) = \{y \in M \mid f(x, y) \leq V(y) + \epsilon(y)\},$$

где $\epsilon(y)$ — некоторая положительная функция, зависящая от параметра y. Следующий пример показывает, что утверждение теоремы 3.3 для такого отображения, вообще говоря, неверно.

П р и м е р 3.3. Пусть $X = [0, 2]$, $Y = [0, 1]$, $\epsilon(y) = y$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = 0, \\ xy + 1, & \text{если } y \in (0, 1]. \end{cases}$$

В этом случае

$$b(y) = \begin{cases} [0, 2], & \text{если } y = 0, \\ [0, 1], & \text{если } y \in (0, 1], \end{cases}$$

$a_0(0) = [0, 2]$. Очевидно, что многозначное отображение b не является полунепрерывным снизу в точке 0 и через точку $(0, 2)$ не проходит непрерывная селекция отображения b.

4. Непрерывные селекции отображения a_ϵ (случай равномерно выпуклого пространства X)

В этом параграфе мы рассмотрим задачу (2.1) в ситуации, когда пространство X равномерно выпукло. Напомним, что пространство X называется равномерно выпуклым, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta(\epsilon) > 0$ такое, что из неравенств $\|u\| \leq 1$, $\|v\| \leq 1$ и $\|u - v\| \geq \epsilon > 0$ следует

$$\|u + v\| \leq 2(1 - \delta(\epsilon)).$$

Приведем некоторые свойства равномерно выпуклых пространств, которые нам понадобятся в дальнейшем (подробнее см. [13]).

В равномерно выпуклом пространстве X, если $x_n \to x_0$ слабо и $\|x_n\| \to \|x_0\|$, то $x_n \to x_0$ сильно. Всякое равномерно выпуклое пространство является рефлексивным. Пространства L_p $(1 < p < \infty)$ являются равномерно выпуклыми.

Лемма 4.1. *Пусть X — равномерно выпуклое банахово пространство и $p(x) = \|x\|^2$. Тогда p является строго выпуклым функционалом, т. е. если $x_1 \neq x_2$, то*

$$p(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha p(x_1) + (1 - \alpha)p(x_2) \;\; \forall \alpha \in (0, 1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что для некоторых $x_1 \neq x_2$ имеет место равенство

$$p(\frac{x_1 + x_2}{2}) = \frac{1}{2}p(x_1) + \frac{1}{2}p(x_2). \tag{4.1}$$

Запишем это равенство в виде

$$\|x_1 + x_2\|^2 = 2\|x_1\|^2 + 2\|x_2\|^2. \tag{4.2}$$

Используя (4.2), получим

$$2\|x_1\|^2 + 2\|x_2\|^2 \leq (\|x_1\| + \|x_2\|)^2 = \|x_1\|^2 + 2\|x_1\|\|x_2\| + \|x_2\|^2,$$

откуда $(\|x_1\| - \|x_2\|)^2 \leq 0$, т. е. $\|x_1\| = \|x_2\|$. Отсюда и из (4.2) следует, что

$$\|x_1 + x_2\| = 2\|x_1\|. \tag{4.3}$$

Но поскольку пространство X строго нормировано, имеет место неравенство

$$\|\frac{x_1}{\|x_1\|} + \frac{x_2}{\|x_2\|}\| < 2,$$

т. е.

$$\|x_1 + x_2\| < 2\|x_1\|,$$

которое противоречит (4.3).

Итак, доказано, что ни при каких $x_1 \neq x_2$ равенство (4.1) не выполняется. Поэтому, согласно [14, Теорема 3, с. 3], для любого $\alpha \in (0, 1)$ имеет место строгое неравенство

$$p(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha p(x_1) + (1-\alpha)p(x_2),$$

означающее, что p — строго выпуклый функционал. □

Будем обозначать значение линейного непрерывного функционала $x^* \in X^*$ на элементе $x \in X$ через $\langle x^*, x\rangle$.

Лемма 4.2. *Пусть выполнены следующие условия*

1) M *— выпуклое замкнутое ограниченное множество равномерно выпуклого банахова пространства* X, Y *— топологическое пространство и* $z : Y \to M$ *— непрерывное отображение;*

2) *для функции* $f : X \times Y \to R$ *производная* $f'_x(x, y)$ *непрерывна по совокупности переменных* (x, y).

Тогда функция

$$F(x, y) = \langle f'_x(z(y), y), x - z(y)\rangle + \delta\|z(y) - x\|^2, \quad (\delta > 0)$$

при каждом фиксированном $y \in Y$ *имеет единственный минимум* $x^*(y)$ *на* M *и отображение* $x^* : Y \to M$ *непрерывно.*

Доказательство. Сначала покажем, что функция минимума

$$W(y) = \min_{x \in M} F(x, y)$$

непрерывна.

Пусть $y_0 \in Y$, $\epsilon > 0$. Поскольку F полунепрерывно сверху по совокупности переменных (x, y), каждой точке $x \in M$ можно сопоставить открытые окрестности $N(x)$ и $N(y_0)$ точек x и y_0 такие, что

$$F(x', y) \leq F(x, y_0) + \epsilon \quad \forall x' \in N(x) \cap M, \quad y \in N(y_0).$$

Следовательно,

$$W(y) = \min_{u \in M} F(u, y) \leq F(x', y) \leq F(x, y_0) + \epsilon \quad \forall x \in M,$$

т. е.

$$W(y) \le W(y_0) + \epsilon \quad \forall y \in N(y_0).$$

Покажем теперь, что W полунепрерывно снизу в y_0. Пусть $y_n \to y_0$ сильно, а $x_n \to x$ слабо. Тогда

$$\begin{aligned} F(x_n, y_n) \ge \langle f'_x(z(y_n), y_n) - f'_x(z(y_0), y_0), y_n - y_0\rangle \\ + \langle f'_x(z(y_0), y_0), y_n - y_0\rangle + \delta\|z(y_n) - x_n\|^2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Поскольку функционал $J(u) = \|u\|^2$ слабо полунепрерывен снизу и

$$\langle f'_x(z(y_n), y_n) - f'_x(z(y_0), y_0), y_n - y_0\rangle \to 0, \quad \langle f'_x(z(y_0), y_0) y_n - y_0\rangle \to 0,$$

то из (4.4) получаем

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n, y_n) \ge F(x, y_0). \tag{4.5}$$

Из (4.5) следует, что каждой точке $x \in M$ можно сопоставить слабо открытую окрестность $N(x)$ точки x и окрестность $N_x(y_0)$ точки y_0 такие, что

$$F(x', y) \ge F(x, y_0) - \epsilon \quad \forall x' \in N(x) \cap M, \quad \forall y \in N_x(y_0). \tag{4.6}$$

Поскольку M — выпукло и замкнуто, то оно слабо компактно в равномерно выпуклом банаховом пространстве X. Следовательно, множество M может быть покрыто m окрестностями $N(x_i)$ и, таким образом, множество $N = \bigcup_{i=1}^m N(x_i)$ является окрестностью множества M. Положим

$$N(y_0) = \bigcap_{i=1}^m N_{x_i}(y_0).$$

Если $y \in N(y_0)$ и $x \in M$, то $x \in N$ и, следовательно, x принадлежит некоторому $N(x_i)$. Так как $y \in N_{x_i}(y_0)$, то из (4.6) следует, что

$$F(x, y) \ge F(x_i, y_0) - \epsilon \ge W(y_0) - \epsilon.$$

Отсюда

$$W(y) \ge W(y_0) - \epsilon.$$

Теперь покажем, что отображение $x^* : Y \to M$ непрерывно. Пусть $y_n \to y_0$. Тогда $W(y_n) \to W(y_0)$. Из этого соотношения, поскольку $x^*(y_n) \to x^*(y_0)$ слабо и поэтому

$$\langle f'_x(z(y_n), y_n), x^*(y_n) - z(y_n)\rangle \to \langle f'_x(z(y_0), y_0), x^*(y_0) - z(y_0)\rangle,$$

получаем

$$\delta\|z(y_n) - x^*(y_n)\|^2 \to \delta\|z(y_0) - x^*(y_0)\|^2. \tag{4.7}$$

Так как $z(y_n) - x^*(y_n) \to z(y_0) - x^*(y_0)$ слабо, то из (4.7) следует, что $z(y_n) - x^*(y_n) \to z(y_0) - x^*(y_0)$ сильно, т. е. $x^*(y_n) \to x^*(y_0)$ сильно. □

Теорема 4.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) M *— выпуклое замкнутое и ограниченное множество равномерно выпуклого банахова пространства* X, *а* Y *— топологический компакт;*

2) *функция* $f(x,y)$ *выпукла по* x;

3) *производная* $f'_x(x,y)$ *непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию Липшица по переменной* x, *т. е. существует число* $L>0$, *такое, что*

$$\|f_x(x_1,y)-f'_x(x_2,y)\| \le L\|x_1-x_2\| \quad \forall x_1,x_2\in M \quad \forall y\in Y.$$

Тогда для $x_0\in a_0(y_0)$, $\epsilon>0$ *существует непрерывное отображение* $x: Y\to M$, *такое, что*

$$x(y)\in a_\epsilon(y) \quad \forall y\in Y, \quad x(y_0)=x_0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как отображение $f'_x(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица по первому аргументу, имеем

$$\begin{aligned}&|f(x_1,y)-f(x_2,y)-\langle f'_x(x_2,y),x_1-x_2\rangle|\\ &\qquad = \Big|\int_0^1 \langle f'_x(x_2+\theta(x_1-x_2),y)-f'_x(x_2,y),x_1-x_2\rangle d\theta\Big| \le \frac{L}{2}\|x_1-x_2\|^2. \qquad (4.8)\end{aligned}$$

Построим функциональную последовательность $\{x_k(y)\}$ по следующему рекуррентному правилу

$$x_0(y)=y_0, \quad x_{k+1}(y)=\operatorname*{argmin}_{x\in M}\Big\{\big\langle f'_x(x_k(y),y),x-x_k(y)\big\rangle+\frac{L}{2}\|x-x_k(y)\|^2\Big\}.$$

Согласно лемме 4.2 для любого k отображение $x_k: Y\to M$ непрерывно и, нетрудно заметить, что $x_k(y_0)=y_0$. Пусть $x^*(y)\in a_0(y)$ $\forall y\in Y$. Из (4.8) следует, что

$$\begin{aligned}f(x_{k+1}(y),y)-f(x_k(y),y) &\le \langle f'_x(x_k(y),y),x-x_k(y)\rangle+\frac{L}{2}\|x_{k+1}(y)-x_k(y)\|^2\\ &\le \min_{x\in M}\Big\{\langle f'_x(x_k(y),y),x-x_k(y)\rangle+\frac{L}{2}\|x-x_k(y)\|^2\Big\}\\ &\le \min_{x\in M}\Big\{f(x,y)-f(x_k(y),y)+\frac{L}{2}\|x-x_k(y)\|^2\Big\}. \qquad (4.9)\end{aligned}$$

Так как множество M выпуклое, то

$$[x_k(y),x^*(y)]=\Big\{(1-\alpha)x_k(y)+\alpha x^*(y),\ \ \alpha\in[0,1]\Big\}\subseteq M.$$

Учитывая это равенство, из (4.9) получаем

$$\begin{aligned}f(x_{k+1}(y),y)-f(x_k(y),y) &\le \min_{x\in[x_k(y),\,x^*(y)]}\Big\{f(x,y)-f(x_k(y),y)+\frac{L}{2}\|x-x_k(y)\|^2\Big\}\\ &= f((1-\alpha)x_k(y)+\alpha x^*(y),y)-f(x_k(y),y)+\frac{L}{2}\alpha^2\|x^*(y)-x_k(y)\|^2\\ &\le -\alpha(f(x_k(y),y)-f(x^*(y),y))+\frac{L}{2}\alpha^2\|x^*(y)-x_k(y)\|^2.\end{aligned}$$

Подставляя в это неравенство вместо α значение α_k, определенное в теореме 3.2, и затем просуммируем полученные неравенства по всем k от 0 до n, получим

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k(f(x_k(y),y)-f(x^*(y),y)) \le f(x_0,y)-f(x_{n+1}(y),y)+\frac{L}{2}D\sum_{k=0}^n\alpha_k^2, \qquad (4.10)$$

где D — диаметр множества M. Из неравенства (4.10) следует, что

$$|f(x_{n+1}(y),y)-f(x_0,y)|\le \|f'_x(x_0,y)\|\|x_0-x_{n+1}(y)\|+\frac{L}{2}\|x_0-x_{n+1}(y)\|^2 \\ \le GD+\frac{L}{2}D\equiv C_1,$$

где число G такое, что

$$\|f'_x(x_0,y)\|\le G \quad \forall y\in Y.$$

Такое число существует, поскольку производная $f'_x(x_0,y)$ непрерывна по y, а Y — компакт.

Таким образом, правая часть неравенства (4.10) ограничена некоторым числом C_2. Положим

$$\overline{x}_n(y)=\frac{1}{A_n}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x_k(y),$$

где $A_n=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k$. Тогда из (4.10) следует, что

$$f(\overline{x}_n(y),y)-f(x^*(y),y)\le\frac{C_2}{A_n}.$$

Так как $\frac{C_2}{A_n}\to 0$, для достаточно больших n имеем

$$f(\overline{x}_n(y),y)-f(x^*(y),y)\le\epsilon.$$

И в заключение заметим, что $\overline{x}_n(y_0)=x_0$. □

References

[1] F. Bonnans, A. Shapiro, “Optimization problems with perturbations: a guided tour”, *SIAM Rev.*, **40**:2 (1998), 228–264.

[2] А. В. Арутюнов, *Лекции по выпуклому и многозначному анализу*, Физматлит, М., 2014. [A. V. Arutyunov, *Lectures on Convex and Multivalued Analysis*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2014 (In Russian)].

[3] E. Michael, “Continuous selections 1”, *Annals of Mathematics*, **63**:2 (1956), 361–382.

[4] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977. [J. Varga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russian)].

[5] П.-Ж. Лоран, *Аппроксимация и оптимизация*, Мир, М., 1975, 496 с. [P.-J. Laurent, *Approximation and Optimization*, Mir Publ., Moscow, 1975 (In Russian), 496 pp.]

[6] Ж.-П. Обен, И. Экланд, *Прикладной нелинейный анализ*, Мир, М., 1988, 512 с. [J.-P. Aubin, I. Ekland, *Applied Nonlinear Analysis*, Mir Publ., Moscow, 1988 (In Russian), 512 pp.]

[7] R. T. Rockafellar, Roger J. B. Wets, *Variational Analysis*, Springer Berlin, Heidelberg, Berlin, 2009.

[8] Р. А. Хачатрян, “Метод проекции градиентов и непрерывные селекции многозначных отображений”, *Вестник евразийского национального университета имении Л. Н. Гумилева. Серия математика, информатика, механика*, 2018, № (3)124, 95–100. [R. A. Khachatryan, “The gradient projection method and continuous selections of multivalued mappings”, *Bulletin of the Eurasian National University named after L. N. Gumilyev. Series Mathematics, Informatics, Mechanics*, 2018, № (3)124, 95–100 (In Russian)].

[9] В. И. Бердышев, "Непрерывность многозначного отображения, связанного с задачей минимизации функционала", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:3 (1980), 483–509; англ. пер.:V. I. Berdyshev, "Continuity of a multivalued mapping connected with the problem of minimizing a functional", *Izv. Math.*, **16**:3 (1981), 431–456.

[10] А. В. Архангельский, "Паракомпактность и метризация. Метод покрытий в классификации пространств", *Общая топология – 3*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **51**, ВИНИТИ, М., 1989, 5–80. [A. V. Arkhangel'skii, "Paracompactness and metrization. The covering method in classification of spaces", *General topology – 3*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., **51**, VINITI, Moscow, 1989, 5–80 (In Russian)].

[11] Б. Н. Пшеничный, *Метод линеаризации*, Наука, М., 1983, 136 с. [B. N. Pshenichny, *Linearization Method*, Nauka Publ., Moscow, 1983 (In Russian), 136 pp.]

[12] А. Г. Сухарев, А. Г. Тимохов, В. В. Федоров, *Курс методов оптимизации*, Наука, М., 1986. [A. G. Sukharev, A. G. Timokhov, V. V. Fedorov, *Course of Optimization Methods*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (In Russian)].

[13] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980. [V. A. Trenogin, *Functional Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (In Russian)].

[14] В. Н. Малоземов, "Удивительное свойство выпуклых функций", *Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы*, Избранные доклады Международной конференции «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвященной памяти профессора В. Ф. Демьянова (Санкт-Петербург, 22–27 мая 2017), Международный математический институт им. Леонарда Эйлера, Санкт-Петербург, 2017. [V. N. Malozemov, "An amazing property of convex functions", *Constructive Non-Smooth Analysis and Related Questions*, Selected Papers of the International Conference "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Issues" Dedicated to the Memory of Professor V. F. Demyanov (St. Petersburg, May 22–27, 2017), International Mathematical Institute. Leonhard Euler, St. Petersburg, 2017 (In Russian)].

Информация об авторе

Хачатрян Рафик Агасиевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры численного анализа и математического моделирования. Ереванский государственный университет, г. Ереван, Армения. E-mail: khrafik@ysu.am
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7908-0562

Поступила в редакцию 21.06.2022 г.
Поступила после рецензирования 29.08.2022 г.
Принята к публикации 13.09.2022 г.

Information about the author

Rafik A. Khachatryan, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Numerical Analysis and Mathematical Modeling Department. Yerevan State University, Yerevan, Armenia.
E-mail: khrafik@ysu.am
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7908-0562

Received 21.06.2022
Reviewed 29.08.2022
Accepted for press 13.09.2022